به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

بهار ۱۴۰۳

تبدیل خطی، تغییر پایه، دایمنشن و رنک

تمرین تئوری چهارم

تاریخ انتشار: ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۳

---

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۲۰ نمره)

الف) ثابت کنید:

$$Nullity\{ABC\} \leq Nullity\{A\} + Nullity\{B\} + Nullity\{C\}$$

ب) ثابت کنید:

$$Rank\{ABC\} \leq min\{Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\}\}$$

پ) با فرض $ABC = ۰$ ثابت کنید:

$$Rank\{CBA\} \leq \lfloor \frac{۲n}{۳} \rfloor$$

ت) اگر A یک ماتریس n در n باشد، ثابت کنید عبارات زیر هم‌ارز هستند:

$$N(A) = N(A^۲)$$

$$R(A) = R(A^۲)$$

$$R(A) \cap N(A) = \{۰\}$$

پاسخ

الف)

با دوبار اثبات عبارت زیر، میتوانیم به خواسته سوال برسیم. هدف ما نشان دادن عبارت زیر است:

$$\dim(\ker(AB)) \leq \dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B))$$

با استفاده از قضیه Rank-Nullity میتوانیم استنباط کنیم که:

$$\text{Rank}(AB) \geq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B) - \text{n}$$

حال اثبات را آنالیز کنیم. فرض کنید یک پایه برای کرنلB باشند: $\mathbf{B} = \{\beta_۱, ..., \beta_n\}$

حال میتوانیم آن را با اضافه کردن بردارهایی، گسترش دهیم:

$$\text{adding}(\alpha_۱, ..., \alpha_s) \Leftrightarrow \text{for basis}(ker(AB))$$

حال میخواهیم نشان دهیم بردارهای زیر مستقل خطی هستند:

$$\{B(a_۱), \dots, B(a_s)\}$$

فرض کنید:

$$\sum_{i=r+۱}^{n} \gamma_i B(a_i) = ۰$$

چون B خطی است، داریم:

$$B\left(\sum_{i=r+۱}^{n} \gamma_i a_i\right) = ۰$$

پس عبارت داخل پرانتز به $ker(B)$ تعلق دارد.

چون $\{\beta_۱, ..., \beta_n\}$ همگی مستقل هستند، پس باید همه γ_i برابر با صفر باشند.

از این رو:

$$\dim(\ker(A)) \geq n - r$$

و در نتیجه:

$$\dim(\ker A) + \dim(\ker B) \geq \dim(\ker(AB))$$

ب)

فرض کنید A، B، و C سه ماتریس باشند. ما می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$\text{Rank}(ABC) \leq \min\{\text{Rank}(A), \text{Rank}(B), \text{Rank}(C)\}$$

ابتدا، توجه داریم که فضای ستونی ABC، که با $\mathcal{C}(ABC)$ نشان داده می‌شود، زیرفضایی از فضای ستونی AB است:

$$\mathcal{C}(ABC) \subseteq \mathcal{C}(AB)$$

از آنجا که فضای ستونی AB خود زیرفضایی از فضای ستونی A است، داریم:

$$\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$$

بنابراین:

$$\mathcal{C}(ABC) \subseteq \mathcal{C}(A)$$

و این بدان معناست که:

$$\text{Rank}(ABC) \leq \text{Rank}(A)$$

به طور مشابه، می‌توان نشان داد که:

$$\mathcal{C}(ABC) \subseteq \mathcal{C}(BC) \subseteq \mathcal{C}(B)$$

که منجر به:

$$\text{Rank}(ABC) \leq \text{Rank}(B)$$

و همچنین:

$$\mathcal{C}(ABC) \subseteq \mathcal{C}(C)$$

که منجر به:

$$\text{Rank}(ABC) \leq \text{Rank}(C)$$

از این سه نابرابری، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\text{Rank}(ABC) \leq \min\{\text{Rank}(A), \text{Rank}(B), \text{Rank}(C)\}$$

این اثبات نشان می‌دهد که رتبه‌ی حاصلضرب سه ماتریس نمی‌تواند بیشتر از کمترین رتبه‌های ماتریس‌های تشکیل‌دهنده باشد.

پ)

ابتدا توجه کنید که

$$\dim(\ker(ABC)) \leq \dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B)) + \dim(\ker(C)),$$

پس حداقل یکی از سه کرنل حداقل برابر است با:

$$\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

همچنین توجه داشته باشید که :

$$\text{Rank}(CBA) \leq \min\{\text{Rank}(C), \text{Rank}(B), \text{Rank}(A)\}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$\text{Rank}(CBA) \leq n - \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil = \left\lfloor \frac{۲n}{۳} \right\rfloor$$

ت)

دو عبارت زیر همیشه برقرار هستند:

$$N(A) \subseteq N(A^۲) \text{ و } R(A^۲) \subseteq R(A)$$

پس به شیوه زیر داریم:

$$N(A) = N(A^۲) \Rightarrow \dim N(A) = \dim N(A^۲)$$
$$\Leftrightarrow n - \text{Rank}(A) = n - \text{Rank}(A^۲)$$
$$\Leftrightarrow \text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^۲)$$
$$\Leftrightarrow R(A) = R(A^۲).$$

همچنین داریم:

$$\text{Rank}(A^۲) = \text{Rank}(A) - \dim(R(A) \cap N(A))$$

و طبق اثبات قبل داریم:

$$R(A^۲) = R(A) \Leftrightarrow \text{Rank}(A^۲) = \text{Rank}(A) \Leftrightarrow dim(R(A) \cap N(A)) = ۰.$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره)

الف) فرض کنید $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbf{F})$ و $\varphi \neq ۰$. با فرض اینکه $u \in V$ در $Null\,\varphi$ نباشد، ثابت کنید

$$V = Null\,\varphi \oplus \{au : a \in F\}.$$

ب) فرض کنید A یک ماتریس m در n با شرط $A \neq ۰$ باشد.

ثابت کنید رنک A برابر ۱ است اگر و تنها اگر $(c_۱, \ldots, c_m) \in F^m$ و $(d_۱, \ldots, d_n) \in F^n$ به طوری‌که $A_{j,k} = c_j d_k$ برای هر $j = ۱, \ldots, m$ و هر $k = ۱, \ldots, n$ برقرار باشد.

پاسخ

الف)

ابتدا ثابت می‌کنیم که اشتراک $Null(\phi)$ و $A = \{au : a \in F\}$ تنها بردار صفر است.

$$v \in V, v \in Null(\phi) \cap A$$

در نتیجه داریم:

$$\phi(v) = a\phi(u), \phi(v) = ۰$$

که نتیجه می‌دهد: $a = ۰$ یعنی $v = ۰$

حال قسمت دوم را ثابت می‌کنیم:

$$x \in V, \phi(x) = \beta$$

اگر $\beta = ۰$ که به وضوح

$$x \in direct\_sum$$

در غیر اینصورت داریم:

$$\phi(\frac{\beta}{\phi(u)}u) = \beta$$

که به سادگی می‌توان دید می‌توانیم x را به فرم زیر بنویسیم:

$$x = (\frac{\beta}{\phi(u)})u + v$$

که به وضوح $v \in Null(\phi)$ است و بنابراین حکم اثبات می‌شود.

ب) طرف اول:

$$\forall j, k : A_{j,k} = c_j d_k$$

$$A \neq ۰ \rightarrow rank(A) \geq ۱$$

$$row_i(A) = (\frac{c_i}{c_j}) * row_j(A)$$

بنابراین، هر دوسطری از A وابسته خطی هستند در نتیجه:

$$rank(A) \leq ۱$$

که در نهایت نتیجه می‌شود که: $rank(A) = ۱$

طرف دوم:

$$rank(A) = ۱$$

طبق این گزاره، هر دو سطر از A وابسته خطی هستند. حال نسبت سطر i به سطر j را $t_{i,j}$ می‌نامیم. حال کافی است دنباله های c_i و d_j را ارایه کنیم. کافی است که داشته باشیم:

$$(c_۱, c_۲, ..., c_m) = (۱, t_{۲,۱}, t_{۳,۱}, ..., t_{m,۱})$$

و

$$(d_۱, d_۲, ..., d_n) = (a_{۱,۱}, a_{۱,۲}, ..., a_{۱,n})$$

بنابراین زمانی که $rank(A) = ۱$ باشد، می‌توان دنباله های c_i و d_j پیدا کرد که $A_{j,k} = c_j d_k$

پرسش ۳ (۲۵ نمره)
الف) ماتریس تبدیل پایه P از پایه $\alpha = \{x^۲ + x + ۱, x^۲ + ۱, x - ۱\}$ به $\beta = \{۲x^۲ + ۳x + ۱, ۲x^۲ + ۲x + ۱, -x^۲ - ۲\}$ را بیابید.

ب) از نتیجه‌ی بخش الف برای محاسبه‌ی ماتریس تبدیل پایه β به α استفاده کنید.

ج) فرض کنید تابع چند جمله‌ای درجه ۲ $p(x)$ دارای مختصات $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ نسبت به پایه β است. این مختصات نسبت به α چقدر است؟

پاسخ

ابجد ماتریس P طبق تعریف ماتریس $[I]_\beta^\alpha$ است. محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{gathered} ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۲(x^۲ + x + ۱) + (x - ۱) \\ ۲x^۲ + ۲x + ۱ = (x^۲ + x + ۱) + (x^۲ + ۱) + (x - ۱) \\ -x^۲ - ۲ = -(x^۲ + x + ۱) + (x - ۱) \end{gathered}$$

پس:

$$P = [I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

پس ماتریس تبدیل پایه از β به α که طبق تعریف $[I]_\alpha^\beta$ است، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$[I]_\alpha^\beta = ([I]_\beta^\alpha)^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱/۳ & -۲/۳ & ۱/۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱/۳ & -۱/۳ & ۲/۳ \end{pmatrix}$$

اگر تابع چندجمله‌ای $p(x)$ نسبت به پایه β مختصات $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ داشته باشد، مختصات آن نسبت به α هست:

$$[p(x)]_\alpha = [I]_\beta^\alpha \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۶ \end{pmatrix}$$

پرسش ۴ (۱۵ نمره) فرض کنید V ابعاد محدودی داشته باشد و داشته باشیم $T_۱, T_۲ \in \mathcal{L}(V, W)$ ثابت کنید رنج $T_۱$ با رنج $T_۲$ برابر است اگر و تنها اگر عملگر معکوس‌پذیر $S \in \mathcal{L}(V)$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $T_۱ = T_۲S$

پاسخ

فرض می‌کنیم $rangeT_۱ = rangeT_۲$. در این صورت فرض کنید $u_۱, \dots, u_m$ یک مجموعه پایه برای $nullT_۱$ است. می‌توانیم این مجموعه را گسترش دهیم تا مجموعه جدید $u_۱, \dots, u_m, w_۱, \dots, w_n$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت $range\ T_۱$ همان $span\{T_۱w_۱, \dots, T_۱w_n\}$ است و $\{T_۱w_۱, \dots, T_۱w_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است.

از آنجایی که $rangeT_۱ = rangeT_۲$ وجود دارد $v_۱, \dots, v_n \in V$ به طوری که $T_۱w_i = T_۲w_n$ به ازای $i = ۱, \dots, n$. اگر که $\{T_۱w_۱, \dots, T_۱w_n\}$ مستقل خطی باشد، می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای $v_۱, \dots, v_n \in V$ مستقل خطی هستند. توجه داشته باشید که هنگامی که $rangeT_۱ = rangeT_۲$، بعد $null\ T_۱$ و $null\ T_۲$ برابر است. فرض کنید $\xi_۱, \dots, \xi_m$ یک مجموعه پایه برای $null\ T_۲$ باشد. بنابراین $\xi_۱, \dots, \xi_m, v_۱, \dots, v_n$ یک مجموعه پایه برای V است. حال تبدیل خطی $S \in \mathcal{L}(V)$ را به شکلی تعریف می‌کنیم که $Su_i = \xi_i$ و $Sw_j = v_j$، بنابر این داریم:

$$\begin{gathered} T_۱w_j = T_۲v_j = T_۲Sw_j \quad \text{for } j = ۱, \dots, n \\ T_۱u_i = ۰ = T_۲\xi_i = T_۲Su_i \quad \text{for } i = ۱, \dots, m \end{gathered}$$

بنابراین $T_۱ = T_۲S$ طبق قضیه‌ی یکتایی. علاوه بر آن S یک تبدیل خطی پوشا و در نتیجه وارون‌پذیر است. اگر یک تابع خطی وارون‌پذیر $S \in \mathcal{L}(V)$ داشته باشیم به طوری که $T_۱ = T_۲S$، به ازای هر $\mu \in V$ داریم:

$$T_۱\mu = T_۲S\mu \in range\ T_۲$$

بنابراین $range\ T_۱ \subseteq range\ T_۲$. از آنجایی که S وارون‌پذیر است، $T_۲ = T_۱S^{-۱}$. به طور مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم که $range\ T_۲ \subseteq range\ T_۱$. بنابراین $range\ T_۱ = range\ T_۲$.

پرسش ۵ (۲۰ نمره) فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

آیا ماتریس A با درایه‌های صحیح وجود دارد به‌گونه‌ای که برابری زیر برقرار باشد؟

$$A^2 = AB + 2I$$

پاسخ

ابتدا نشان می‌دهیم ماتریس A وارون پذیر است.

$$A^2 = AB + 2I \Rightarrow A\frac{(A-B)}{2} = \frac{(A-B)}{2}A = I$$

بنابراین $a^{-1} = \frac{(A-B)}{2}$. حال با ضرب کردن A^{-1} از چپ و راست در معادله داده شده به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} A = ABA^{-1} + 2A^{-1} \\ A = B + 2A^{-1} \end{cases} \Rightarrow ABA^{-1} \Rightarrow AB = BA$$

باتوجه به جابه‌جایی‌پذیر بودن A و B داریم:

$$(2A - B)^2 = 4A^2 + B^2 = B^2 + 8I = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $X = 2A - B$ از طرفی داریم $X^2.X = X.X^2 = X^3$ فرض کنید داشته باشیم:

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$X^2.X = \begin{bmatrix} 8a - 4d + 3g & 8b + 3h - 4e & 8c - 4f + 3i \\ 9d & 9e & 9f \\ -3a - 5d + 11g & -3b + 11h - 5e & -3c - 5f + 11i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a - 3c & -4a + 9b - 5c & 3a + 11c \\ 8d - 3f & -4d - 5f + 9e & 3d + 11f \\ 8g - 3i & -4g + 9h - 5i & 3g + 11i \end{bmatrix} = X.X^2$$

با برابر قرار دادن درایه‌های متناظر ماتریس‌های فوق به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} 9e = -4d - 5f + 9e \\ 3d + 11f = 9f \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} 4d = -5f \\ 3d = -2f \end{cases} \Rightarrow d = f = 0$$

حال اگر ماتریس X^2 را بررسی کنیم می‌بینیم که $e^2 = 9$
به‌طریق مشابه به‌دست می‌آید:

$$g = -c, a + c = i$$

همچنین داریم:

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \pm 3 & 0 \\ g & h & i \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 + cg & ab \pm 3b + ch & ac + ci \\ 0 & 9 & 0 \\ ag + gi & bg \pm 3h + hi & cg + i^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$a^2 = cg = a^2 - c^2 = 8 \Rightarrow A = \pm 3, c = \pm 1$$

از طرفی

$$i = a + c \Rightarrow i = \pm 4, \pm 2$$

اما داریم:

$$i^2 + cg = i^2 - c^2 = -2$$

ولی:

$$i^2 - c^2 = 15, 3$$

پس به تناقض می‌رسیم و ماتریس A با درایه‌های صحیح وجود ندارد.